This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

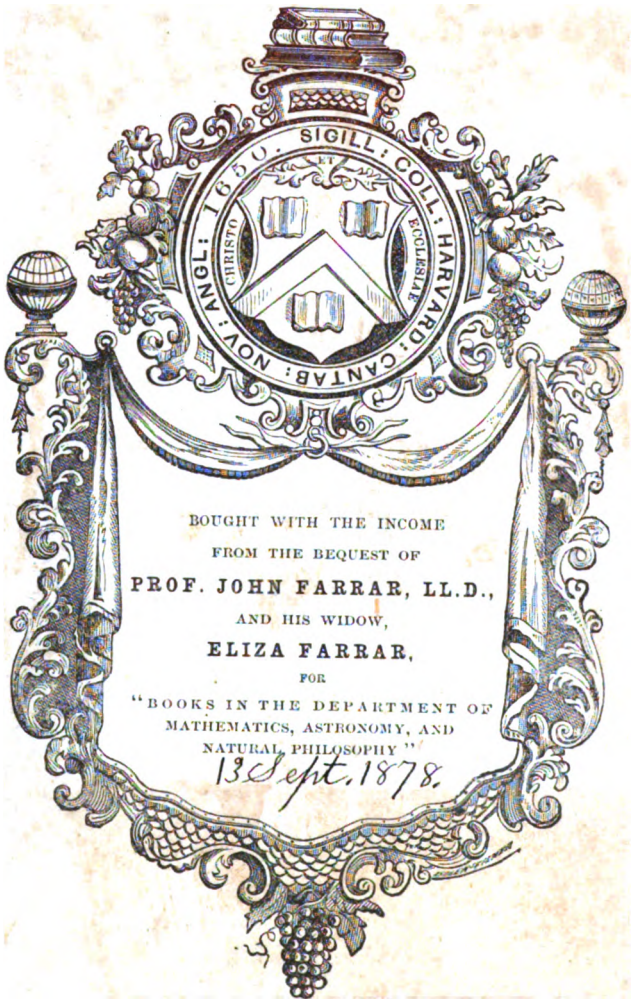
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 3038.77



SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Ueber die

Auswerthung bestimmter Integrale

mit Hülfe von

Veränderungen des Integrationsweges.

Von

J. J. Schönholzer.

Bern.

Buchdruckerei Jent & Reinert.

1877.

Digitized by Google

~~III-336~~
Math 3038.77

1878, Sept. 13.
Farrar fund.

Digitized by Google

Ueber die Auswerthung bestimmter Integrale

mit Hülfe von Veränderungen des Integrationsweges.

Von **J. J. Schönholzer.**

Die nachfolgenden Untersuchungen, zu denen der Verfasser durch die ausgezeichneten Vorlesungen des Herrn Professor Schläfli in Bern angeregt wurde, beziehen sich auf bestimmte Integrale, welche mit wenigen Ausnahmen in dem vortrefflichen Werke des Herrn Dr. G. F. Meyer: «Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen» besprochen werden. Sie stützen sich auf die bekannten Sätze über bestimmte Integrale, welche sich über den Rand einer vollständig begrenzten Fläche erstrecken. Obwohl diese Sätze nun ein Gemeingut aller Mathematiker geworden sind, so findet man doch in den bisherigen mathematischen Publikationen nur wenige Versuche, mit ihrer Hülfe zwischen reellen Grenzen genommene Integrale auszuwerthen. Und doch bilden sie den Grundstein einer Methode, welche in so vielen Fällen mit überraschender Einfachheit und auf einem natürlichen, von allen Kunstgriffen freien Wege zum Ziele führt.

§ 1.

Wenn wir in einer Ebene ein orthogonales Coordinatensystem annehmen, so kann nach Gauss die complexe Grösse $z = a + ib$ durch einen Punkt repräsentirt werden, dessen Coordinaten die beiden Componenten a und b sind (Fig. 1). Die stets positiv aufzufassende Strecke $oz = r$ ist der absolute Werth und der Winkel φ die Phase der Variabeln z. Nun ist aber $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$ und daher $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ oder $z = re^{i\varphi}$.

Wenn φ sich stetig ändert von o bis 2π und r constant bleibt, so beschreibt der Punkt z einen Kreis um den Nullpunkt. Wir bezeichnen diese Drehung dadurch, dass wir sagen, die Variable z umlaufe den Nullpunkt rechtläufig. Die Bewegung heisst hingegen rückläufig, wenn die Phase von $\varphi = o$ bis $\varphi = -2\pi$ stetig abnimmt. In Zukunft soll diese Bezeichnung auch für die Fälle beibehalten werden, in denen der absolute Werth r sich mit der Phase stetig ändert und z nicht mehr einen Kreis, sondern eine beliebige zusammenhängende Curve beschreibt.

Digitized by Google

Die Variable z kann nun ausser o jede beliebige andere Constante etwa k umlaufen (Fig. 2). Die Gerade kz gibt uns durch Grösse und Richtung sowohl den absoluten Werth als auch die Phase von $z - k$; denn es ist offenbar $z - k = \rho e^{i\varphi}$. Wenn daher z einen Kreis um k beschreibt, so wird $z - k$ in derselben Richtung einen Kreis um den Nullpunkt durchlaufen.

Wenn die Variable eine in sich zurückkehrende Curve durchläuft, welche den Nullpunkt umschliesst, so ändert sich ihre Phase um 2π. Liegt der Nullpunkt ausserhalb der durchlaufenen Curve, so kehrt auch die Phase der Variabeln wieder auf ihren frühern Werth zurück. So wird in Fig. 2 die Differenz $z - k$, nicht aber die Variable z eine Veränderung der Phase um 2π erleiden, wenn z den Punkt k in der Richtung der wachsenden oder abnehmenden Winkel umläuft.

Es ist nun wohl zu berücksichtigen, welcher der beiden Fälle vorliegt, wenn man die einem Umlauf der Variabeln entsprechende Aenderung einer Function untersuchen will. Betrachten wir z. B. die Potenz z^n. Da $z = \rho e^{i\varphi}$, so ist $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$ und für $\varphi = o$, $z^n = \rho^n$. Wenn nun die Variable z den Nullpunkt vollständig umläuft, so ändert sich ihre Phase um 2π, und z^n erhält den Werth $\rho^n e^{2in\pi}$, welcher mit dem ursprünglichen Werth ρ^n übereinstimmt, wenn n eine ganze Zahl ist, von ihm aber verschieden ist, wenn der Exponent eine gebrochene Zahl darstellt. Dagegen kehrt die Potenz z^n für beliebige Werthe von n wieder auf ihren Anfangswerth zurück, wenn z eine den Nullpunkt ausschliessende geschlossene Curve durchläuft.

Bei bestimmten Integralen, die sich über den Rand eines vollständig begrenzten Flächenstückes erstrecken, ist es nun von grosser Bedeutung, zu wissen, ob der Integrand nach einem Umlauf der Variabeln wieder seinen ursprünglichen Werth annehme oder nicht. Im ersten Fall ist der Integrationsweg geschlossen; irgend ein Punkt der Curve kann die beiden Grenzen des Integrals darstellen. Da zudem die Integration zwischen complexen Grenzen auch auf verschiedenen Wegen denselben Werth liefert, wenn die betreffenden Integrationswege durch Verschiebung in einander übergeführt werden können, ohne dass dabei ein Unstetigkeitspunkt der zu integrirenden Function überschritten werden muss, so darf auch jede geschlossene Integrationscurve beliebig verändert werden, insofern beim stetigen Uebergang einer Form in eine andere keine gefährlichen Punkte berührt werden.

Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn die zu integrirende Function nicht auf denselben Werth zurückkehrt, wenn also mit andern Worten der Integrationsweg nicht geschlossen ist. Dann muss der Punkt, von welchem die Variable ausgeht und zu dem sie wieder zurückkehrt, als Repräsentant der untern und obern Grenze des Integrals festgehalten werden. Im Uebrigen darf der Integrationsweg unter den vorhin angegebenen Beschränkungen beliebig ausgedehnt oder zusammengezogen werden.

Betrachten wir zunächst das Integral $\int_{I(o)} x^n dx$, in welchem n eine ganze positive oder negative, jedoch von -1 verschiedene Zahl bedeutet. Der Integrationsweg $I(o)$ bezeichnet einen Kreis oder eine andere beliebige, in sich selbst zurückkehrende Curve, auf welcher die Variable den Punkt 0 rechtläufig umgeht (Fig. 3). Er ist geschlossen, da der Integrand wieder seinen frühern Werth annimmt. Für den Kreis ist $x = \rho e^{i\varphi}$; also $dx = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Wenn dem Ausgangspunkt der Variabeln die Phase o entspricht, so ist offenbar

Digitized by Google

$$\int_{I(o)} x^n dx = \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \cdot i d\varphi =$$

$$= \rho^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)\varphi}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = \rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)2\pi} - e^0}{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Geben wir dem Exponenten den Werth $n = -1$, so nimmt die Differenz der den beiden Grenzen entsprechenden Integralwerthe die Form $\frac{0}{0}$ an. Es ergibt sich jedoch mit Hülfe der oben angegebenen Substitution direkt:

$$\int_{I(o)} \frac{dx}{x} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2i\pi. \qquad (2)$$

Das Integral $\int_{I(a)} (x-a)^n \cdot dx$, in welchem die Variable x den Pol $x = a$ rechtläufig umkreist (Fig. 3), kann durch die Substitution $x - a = y$ auf das vorhergehende zurückgeführt werden. Es ist daher ebenfalls

$$\int_{I(a)} (x-a)^n dx = 0 \qquad (3)$$

so lange n eine von -1 verschiedene ganze Zahl bedeutet und ebenso

$$\int_{I(a)} \frac{dx}{x-a} = 2i\pi. \qquad (4)$$

Welcher Werth kommt nun dem ersten Integral zu, wenn anstatt der ganzen Zahl n eine gebrochene Zahl a als Exponent auftritt, und wenn die Variable (Fig. 4) von $-\rho$ ausgeht, in einem mit dem Radius ρ beschriebenen Kreise um die o herumführt und wieder zu $-\rho$ zurückkehrt? Stellen wir ein für alle Mal fest, dass die Variable im Augenblick ihres Durchganges durch den positiven Theil der Realitätsgeraden die Phase o besitze, so beginnt sie im vorliegenden Fall ihren Weg mit der Phase $-\pi$ und endigt ihn mit der Phase $+\pi$. Beiden Phasen entspricht derselbe Werth der Veränderlichen; die Potenz $x^a = \rho^a e^{ia\varphi}$ kehrt jedoch nicht auf den anfänglichen Werth zurück. Der Integrationsweg ist also nicht geschlossen und kann nach der in Fig. 5 enthaltenen Definition mit II $(-\rho \cdot o)$ bezeichnet werden. Dann ist:

$$\int_{II(-\rho \cdot o)} x^a \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \rho^{a+1} e^{i(a+1)\varphi} \cdot i d\varphi$$

$$= \left[\frac{\rho^{a+1} \cdot e^{i(a+1)\varphi}}{a+1} \right]_{-\pi}^{\pi} = \rho^{a+1} \cdot \frac{e^{i(a+1)\pi} - e^{-i(a+1)\pi}}{a+1}$$

Digitized by Google

$$\text{oder} \int_{\text{II}(-\rho \,.\, o)} x^a \, dx = 2 i \rho^{a+1} \frac{\sin (a+1)\, \pi}{a+1}. \qquad (5)$$

Die Integrationscurve ist nun offenbar nicht an die Kreisform gebunden und kann z. B. zu einer Schlinge zusammengezogen werden, welche den Punkt o umgibt und deren Oeffnung sich in $-\rho$ befindet. Sobald aber die Lage dieser Oeffnung verändert wird, so ändert sich im Allgemeinen auch der Werth des Integrals.

§ 2.

Wenn die Function $f(x)$ für $x = a$ und alle benachbarten Werthe stetig ist und wieder auf ihren frühern Werth zurückkehrt, wenn x den Punkt a umläuft, so existirt die unter dem Namen des Cauchy'schen Satzes bekannte Formel

$$\int_{\text{I}(a)} \frac{f(x)}{x-a} \, dx = 2 i \pi \,.\, f(a), \qquad (6)$$

deren Richtigkeit leicht einzusehen ist. Nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen kann der Integrationsweg auf einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt a zusammengezogen werden. Dann ist die Function $f(x)$ in Folge ihrer Stetigkeit für alle Punkte dieses Kreises geradezu gleich der Constanten $f(a)$, d. h. gleich demjenigen Werthe der Function, den sie für $x = a$ annimmt. Mit Hülfe von (4) findet man somit

$$\int_{\text{I}(a)} \frac{f(x)}{x-a} \, dx = f(a) \int_{\text{I}(a)} \frac{dx}{x-a} = 2 i \pi \,.\, f(a).$$

Um das Integral $\int_{\text{I}(a)} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} \, dx$, in welchem n eine ganze Zahl ist, auszuwerthen, setzt man nach dem Taylor'schen Satze

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{1 \,.\, 2} + \ldots + f^n(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Multiplizirt man jedes einzelne Glied dieser Reihe mit $\frac{dx}{(x-a)^{n+1}}$ und integrirt, so verschwinden nach § 1 die Integrale aller Summanden mit Ausnahme von

$$\int_{\text{I}(a)} \frac{f^n(a)}{n!} \,.\, \frac{dx}{x-a} = 2 i \pi \,.\, \frac{f^n(a)}{n!}$$

Daher ist

$$\int_{\text{I}(a)} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} \, dx = 2 i \pi \,.\, \frac{f^n(a)}{n!} \qquad (7)$$

Bekanntlich gelangt man auch zu dieser Formel, indem man beide Seiten der Gleichung (6) wiederholt nach der Constanten a differenzirt.

Digitized by Google

§ 3.

Es ist nun in vielen Fällen äusserst leicht, bestimmte Integrale mit reellen oder complexen Grenzen in solche Integrale überzuführen, die eine direkte Anwendung der Formeln (6) und (7) gestatten. Nehmen wir z. B. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx,$$

welches Herr Meyer in § 26 seines Werkes behandelt. $F(x)$ und $f(x)$ seien ganze algebraische Functionen, die keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen; m sei der Grad von $F(x)$, n derjenige von $f(x)$. Für ein unendlich wachsendes x nähert sich der Werth des Bruches, abgesehen von einem constanten Factor, der Potenz x^{n-m}. Das Integral verhält sich also am Horizont, d. h. auf einem mit unendlich grossem Radius um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, wie $\frac{x^{n-m+1}}{n-m+1}$ und kann daher nur convergiren, wenn $n - m + 1$ negativ ist, oder wenn der Grad von $F(x)$ denjenigen von $f(x)$ um wenigstens 2 Einheiten übersteigt. Zudem darf $F(x)$ keine reellen Wurzeln haben, weil sonst der Integrand und also auch das Integral für diese Werthe der Variabeln unendlich gross würden. Somit muss m eine gerade Zahl sein. Die complexen Wurzeln sind aber paarweise conjugirt; die eine Hälfte ($a_1, a_3, a_5, \ldots a_{m-1}$) liegt nördlich, die andere Hälfte ($a_2, a_4, a_6 \ldots a_m$) südlich von der Realitätsgeraden (Fig. 8). Da das Integral am Horizont überall verschwindet, so darf dem Integrationsweg noch der um den Nullpunkt beschriebene Halbkreis hinzugefügt werden, welcher die Variable vom Ostpunkt ($+\infty$) über den Nordpunkt ($i\infty$) nach dem Westpunkt ($-\infty$) zurückführt. Die so erhaltene Integrationscurve ist geschlossen, da bei einem vollständigen Umlauf der Variabeln auch der Integrand auf seinen ursprünglichen Werth zurückkehrt; sie umschliesst die nördlich von der Realitätsgeraden gelegenen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ rechtläufig und kann daher um dieselben zusammengezogen werden. Weicht man den einzelnen Polen kreisförmig aus, so erhält der Integrationsweg die Form A B C D D′ C′ B′ A′ A. Die geradlinigen Wege C D und D′ C′, sowie A B und B′ A′ dürfen sogar zusammenfallen. Der Integrand hat aber in den zusammenfallenden Punkten D und D′, C und C′ etc. denselben Werth. Die Theile des Integrals, welche entgegengesetzten Wegstrecken entsprechen, heben sich auf und die noch übrig bleibenden Kreise dürfen als geschlossene Integrationscurven betrachtet werden. Diese Kreise umschliessen die einzelnen Pole rechtläufig und das vorgelegte Integral ist somit gleich der Summe von $\frac{m}{2}$ Integralen von der Form

$$\int_{I(a)} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx.$$

Um dieselben auszuwerthen, benutzen wir die Taylor'sche Reihe und setzen, da $F(a) = 0$,

$$F(x) = F'(a) \cdot (x - a) + F''(a) \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

Digitized by Google

Schliessen wir den Integrationsweg enge genug an α an, so brauchen wir in dieser Entwicklung nur das erste Glied zu berücksichtigen, da alle folgenden Glieder von einer höhern Ordnung unendlich klein werden. Es ist somit

$$\int_{I(\alpha)} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int_{I(\alpha)} \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)\,(x-\alpha)}\,dx = 2i\pi \cdot \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}$$

$$\text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} \cdot dx = 2i\pi \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \tag{8}$$

wo sich das Summationszeichen auf alle nördlich von der Realitätsgeraden liegenden Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bezieht.

Es liegt auf der Hand, dass der Integrationsweg des vorgelegten Integrals auch dadurch in eine geschlossene Curve verwandelt werden kann, dass man die Strecke von $-\infty$ nach $+\infty$ den ganzen südlichen Horizont hinzufügt. Dieser neue Integrationsweg umgibt aber die südlich gelegenen Wurzeln rückläufig und kann daher in Curven aufgelöst werden, welche diese Wurzeln einzeln und ebenfalls rückläufig umschliessen. Für einen südlichen Pol α ergibt sich nun

$$\int_{I(\alpha)} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = -2i\pi \cdot \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)},$$

da der Umkehrung des rückläufigen Integrationsweges eine Multiplication mit -1 entspricht. Aus dieser letzten Gleichung folgt aber:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = 2i\pi \cdot \sum -\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}, \tag{9}$$

wo sich das Summationszeichen auf alle südlich von der Realitätsgeraden liegenden Wurzeln erstreckt. Endlich gelangt man mit Hülfe von (8) und (9) zu der Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = i\pi \cdot \sum \pm \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}. \tag{10}$$

Das Summationszeichen dehnt sich hier auf alle Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ aus, und der Bruch $\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}$ ist positiv oder negativ aufzufassen, je nachdem die imaginäre Componente der Wurzel α positiv oder negativ ist.

Zu der Formel (8) gelangt man auch, indem man $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche zerlegt. Dann ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum \frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} \cdot \frac{dx}{x-\alpha}.$$

Digitized by Google

Mit Hülfe des nördlichen Horizontes kann der Integrationsweg wieder zu einer geschlossenen Curve ergänzt werden, welche, wie früher, nur die nördlichen Wurzeln umgibt. Da sich die Summation auf alle Wurzeln bezieht, so liegt bei der einen Hälfte der m Integrale, in welche die rechte Seite zerfällt, der Pol jeweilen südlich von der Realitätsgeraden, also ausserhalb des Integrationsweges, welcher daher auf einen beliebigen Punkt reducirt werden kann. Diese Integrale verschwinden somit, und auf die andern kann unmittelbar die Formel (6) angewendet werden. Dadurch erhält man wieder die Gleichung (10).

Die vorhergehenden Untersuchungen geben noch zu der folgenden Bemerkung Anlass. Das betrachtete Integral konnte dadurch bestimmt werden, dass man den Integrationsweg entweder durch den nördlichen oder aber durch den südlichen Horizont zu einer geschlossenen Curve ergänzte. Im zweiten Fall wurden die südlichen Pole rückläufig umgangen. Kehrt man den Integrationsweg um und führt man also die Variable ebenfalls rechtläufig um dieselben herum, so erhält das Integral nach der bekannten Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

den entgegengesetzten Werth. Die Summe der Integrale, welche (Fig. 10) den beiden Integrationswegen W o O N W und W S O o W entsprechen, ist daher gleich o. Sie kann aber auch dadurch bestimmt werden, dass man die beiden Integrationswege an einander fügt. Es ist leicht einzusehen, dass sich die Integrale, welche den Strecken von $-\infty$ bis $+\infty$ und von $+\infty$ bis $-\infty$ entsprechen, aufheben und der nördliche Halbkreis in seiner Eigenschaft als Integrationsweg gerade als Fortsetzung des südlichen betrachtet werden kann. Der so zusammengesetzte Integrationsweg ist aber eine geschlossene Curve, welche alle Wurzeln der Gleichung $F(x) = o$ umschliesst. Es ist somit:

$$\int_{I(a_1, a_2, \ldots a_m)} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = o. \qquad (11)$$

Diese Formel ist nicht mehr an die Beschränkung gebunden, dass die Gleichung $F(x) = o$ nur imaginäre Wurzeln besitze. Desshalb darf auch der Grad des Polynoms $F(x)$ ungerade sein.

Wenn man nämlich $\frac{f(x)}{F(x)}$ in Partialbrüche zerlegt, so ergibt sich mit Hülfe von (6) die Gleichung:

$$\int_{I(a_1, a_2 \ldots a_m)} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = 2i\pi\left[\frac{f(a_1)}{F'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{F'(a_2)} + \frac{f(a_3)}{F'(a_3)} + \ldots + \frac{f(a_m)}{F'(a_m)}\right] \qquad (12)$$

Es kann aber leicht gezeigt werden, dass die in der Klammer enthaltene Summe gleich o ist; daher ist auch allgemein

$$\int_{I(a_1, a_2 \ldots a_m)} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = o. \qquad (13)$$

Digitized by Google

Dieses Resultat kann sehr einfach interpretirt werden, wenn man die reellen und complexen Werthe nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Kugel darstellt, deren Radius unendlich gross ist. Dann entspricht dem frühern Horizonte, also jedem unendlich grossen Werthe, ein einziger Punkt, welchem ebenso gut wie der reciproken o alle möglichen Phasen von o bis 2π zukommen. Wenn nun die Gleichung $F(x) = o$ keine unendlich grossen Wurzeln hat, so ist $x = \infty$ kein Pol des Integrals, und der Integrationsweg $I(a_1, a_2, \ldots a_m)$ kann um den Punkt $x = \infty$ zusammengezogen und auf einen Punkt reducirt werden. Das entspricht nun vollständig dem Umstand, dass das Integral (13) verschwindet.

Eine ausführliche und von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehende Discussion des vorgelegten Integrals ist sehr geeignet, den Leser mit den hauptsächlichsten Operationen bekannt zu machen, welche zum Zwecke der Auswerthung bestimmter Integrale mit dem Integrationsweg vorgenommen werden dürfen.

§ 4.

Um das Integral

$$\int_{I(o)} x^{-m} (1+x)^{n-1} \, dx,$$

in welchem m und n ganze Zahlen sind, zu bestimmen, entwickelt man $(1+x)^{n-1}$ nach dem binomischen Lehrsatz und multiplicirt jedes einzelne Glied mit x^{-m}. Dadurch erhält man die Summe von n Integralen, von denen jedoch (nach § 1) nur dasjenige einen von o verschiedenen Werth besitzt, welches x^{-1} als Factor enthält; also:

$$\int_{I(o)} \binom{n-1}{m-1} x^{-1} \, dx = 2i\pi \cdot \binom{n-1}{m-1} = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m+1)}.$$

Daher ist auch

$$\int_{I(o)} x^{-m} (1+x)^{n-1} \cdot dx = 2i\pi \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m+1)} \qquad (14)$$

In dieser Formel ist der Integrationsweg geschlossen, da der Integrand nach einem Umlauf der Variabeln wieder auf seinen frühern Werth zurückkehrt. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn statt m die gebrochene Zahl a gesetzt wird. Dann wird der Integrationsweg eine Schlinge, welche den Nullpunkt rückläufig umschliesst und deren Oeffnung in -1 festgehalten werden soll. Die Convergenz des Integrals

$$\int_{II(-1.o)} x^{-a} (1+x)^{n-1} \, dx.$$

erfordert, dass die reelle Componente von n positiv sei. Dann ist der Punkt $x = -1$ zugänglich. Der Integrationsweg darf den Nullpunkt nur dann berühren, wenn $a < 1$ ist. Für diesen Fall kann jedoch der Werth des Integrals leicht bestimmt werden, indem man den Integra-

Digitized by Google

tionsweg so zusammenzieht, dass die Variable zunächst von — 1 bis in die unmittelbare Nähe der o, hierauf in einem sehr kleinen Kreise um die o herum und endlich wieder geradlinig nach — 1 zurückgeführt wird (Fig. 6). Da nach der Voraussetzung $x = o$ kein Unstetigkeitspunkt ist, so verschwindet der dem Kreise entsprechende Theil des Integrals. Es ist aber wohl zu berücksichtigen, dass die Phase der Variabeln durch jenen Umlauf von $-\pi$ in $+\pi$ übergegangen ist, da sie ja nach einer frühern Annahme beim Durchgang durch den positiven Theil der Realitätsgeraden den Werth o besitzen soll. Das vorgelegte Integral ist nun zunächst gleich der Summe:

$$\int_{-1}^{0} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx + \int_{0}^{-1} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx.$$

Der vorigen Bemerkung gemäss setzt man im ersten Integral $x = -u = e^{-i\pi}.u$, $dx = -du$; im zweiten aber $x = -u = e^{i\pi}.u$, $dx = -du$ und erhält

$$\int_{\Pi(-1.o)} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx = -e^{-ia\pi}\int_{0}^{1} u^{-a}(1-u)^{n-1}\,du + e^{ia\pi}\int_{0}^{1} u^{-a}(1-u)^{n-1}\,du$$

$$= \left[e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\right]\int_{0}^{1} u^{-a}(1-u)^{n-1}\,du.$$

Das hier auftretende Euler'sche Integral zweiter Art kann durch Gammafunctionen ausgedrückt werden; die Klammer hingegen ist offenbar $= 2i \sin a\pi$. Daher ist

$$\int_{\Pi(-1.o)} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx = 2i \sin a\pi \cdot \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(n-a+1)}$$

oder, da bekanntlich $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$ ist:

$$\int_{\Pi(-1.o)} x^{-a}(1+x)^{n-1}\,dx = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(n-a+1)}. \qquad (14)$$

Die Formel ist nun allerdings nur für den Fall entwickelt worden, dass $a < 1$ ist. Sie gilt jedoch für ein beliebiges a. Das ist sogleich ersichtlich, wenn man den Integrationsweg wieder weiter ausdehnt. Das ihm entsprechende Integral ist dann eine stetige Function von a und wird somit keine plötzliche Veränderung erleiden, wenn a gleich oder grösser als 1 wird. Die Gleichung (14) wird somit auch für diesen Fall ihre Gültigkeit beibehalten.

Setzt man in derselben $z = \frac{x}{1+x}$ oder $x = \frac{z}{1-z}$, also $dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$, so wird z von $-\infty$ ausgehen, den Nullpunkt rechtläufig umschliessen und wieder zu $-\infty$ zurückkehren. Es entsteht also die neue Gleichung:

Digitized by Google

$$\int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,0)} z^{-a}(1-z)^{-a-n-1}\,dz = 2i\pi\,.\,\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(n-a+1)}\,. \qquad (15)$$

oder wenn man $a - n - 1 = b$ setzt:

$$\int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,o)} z^{-a}(1-z)^{-b}\,dz = 2i\pi\,.\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}. \qquad (16)$$

Im Unendlichen verhält sich der absolute Werth des Integrals annähernd wie $\frac{z^{1-(a+b)}}{1-a-b}$. Die Formel (16) ist daher nur gültig, wenn $a + b > 1$ ist.

§ 5.

Mit Hülfe der Gleichung (16) lässt sich eiu Integral bestimmen, welches Cauchy zuerst in Gergonne's Annalen (Band 17, Seite 109) in seiner berühmten Abhandlung: *„Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres"* aufgestellt und welches Herr Meyer in seinem Werke über bestimmte Integrale (Seite 205) behandelt hat, nämlich das Integral

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(k+i\varphi)^a\,(l-i\varphi)^b}.$$

Dasselbe convergirt nur für den Fall, dass $a + b > 1$ ist. Dann ist es aber auch erlaubt, dem Integrationsweg noch den nördlichen Horizont hinzuzufügen. Da a und b im Allgemeinen keine ganzen Zahlen sind, so kehrt der Integrand nach vollendetem Umlauf der Variabeln nicht auf seinen frühern Werth zurück. Der Integrationsweg ist somit nicht geschlossen. Wir können ihn aber zu einer Schlinge zusammenziehen, welche von $-\infty$ ausgeht, ik rechtläufig umschliesst und wieder zu $-\infty$ zurückkehrt. Es ist daher

$$S = \int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,ik)} \frac{d\varphi}{(k+i\varphi)^a\,(l-i\varphi)^b}$$

oder wenn man $k + i\varphi = u$, $d\varphi = -i\,du$ setzt:

$$S = \int_{\mathrm{II}(-i\infty\,.\,o)} \frac{-i\,.\,du}{u^a\,(l+k-u)^b}$$

Jetzt ist der Integrationsweg eine von $-i\infty$ ausgehende, den Nullpunkt rechtläufig umschliessende Schlinge. Man kann jedoch die beiden Zweige derselben von $-i\infty$ bis $-\infty$ dem Horizont entlang verlängern, da das Integral im Unendlichen verschwindet. Selbstverständlich ist der neue Integrationsweg mit $\mathrm{II}(-\infty\,.\,o)$ identisch, da ja kein Pol zwischen den beiden Wegen liegt. (Man sieht leicht, dass der Endpunkt der Schlinge am ganzen Horizont herumgeführt werden darf, ohne dass sich der Werth des Integrals ändert, wenn nur der zweite Pol $u = l + k$ nie von der Integrationscurve überschritten wird.)

Digitized by Google

Es ist also:

$$S = -i \int_{II\,(-\infty\,.\,o)} \frac{du}{u^a\,(1+k-u)^b},$$

oder für $u = (1+k)\,z$, $du = (1+k)\,dz$:

$$S = -i \int_{II\,(-\infty\,.\,o)} \frac{(1+k)^{1-(a+b)}\,dz}{z^a\,(1-z)^b},$$

und mit Berücksichtigung der Formel (16):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(k+i\varphi)^a\,(1-i\varphi)^b} = 2\pi\,(1+k)^{1-(a+b)}\,\frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}. \qquad (17)$$

In dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{(k+i\varphi)^a\,(1+i\varphi)^b},$$

in welchem $a+b>1$, k und l positiv sind, liegen beide Pole auf der Nordseite der Realitätsgeraden. Man kann aber die Variable von $+\infty$ über den Südpunkt nach $-\infty$ zurückführen. Da der so veränderte Integrationsweg keinen Pol umschliesst, so kann er auf eine beliebig kurze Strecke zusammengezogen werden. Das Integral hat daher den Werth o. Es ist leicht einzusehen, dass k und l auch complex sein dürfen; nur müssen beide zugleich eine positive oder eine negative reelle Componente besitzen.

§ 6.

Das Produkt zweier Bessel'schen Functionen.

Die Bessel'sche Function erster Art wird durch die Gleichung definirt:

$$\overset{a}{J}(x) = \sum_{n=o}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2n}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}. \qquad (18)$$

Wenn man dieselbe mit

$$\overset{b}{J}(x) = \sum_{r=o}^{r=\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,\Gamma(b+r+1)}$$

multiplizirt, so erhält man eine unendliche Reihe, die wieder nach den steigenden Potenzen von x geordnet werden kann. Die Exponenten sind von der Form $a+b+2\lambda$, wo λ alle

Digitized by Google

ganzen positiven Zahlen durchläuft. Um das allgemeine Glied des Produktes zu erhalten, hält man λ zunächst bei einem bestimmten Werthe fest und multiplicirt den Term

$$(-1)^{\lambda-r}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda-2r}}{(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)}$$

der ersten Reihe mit dem allgemeinen Term

$$(-1)^{r}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{b+2r}}{r!\,\Gamma(b+r+1)}$$

der zweiten Reihe. Das Produkt dieser beiden Ausdrücke ist offenbar

$$(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{r!\,(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

und daher das allgemeine Glied des Produktes der Bessel'schen Functionen gleich:

$$\sum_{r=o}^{r=\lambda}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{r!\,(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}$$

$$=(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}\cdot\sum_{r=o}^{r=\lambda}\frac{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}{r!(\lambda-r)!\,\Gamma(a+\lambda-r+1)\,.\,\Gamma(b+r+1)}$$

$$=(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}\cdot\sum_{r=o}^{r=\lambda}\binom{\lambda}{r}\frac{\Gamma(a+b+\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}.$$

Nach Formel (14) ist aber

$$\frac{\Gamma(a+b+\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda-r+1)\,\Gamma(b+r+1)}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Pi(-1\,.\,o)}t^{r-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+\lambda}\,.\,dt.$$

Setzt man oben diesen Werth ein und ändert o zugleich die Reihenfolge der Summation und Integration, so erhält man nach vollzogener Summation als allgemeines Glied der Entwicklung:

$$(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int_{\Pi(-1\,.\,o)}t^{-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+2\lambda}\,.\,dt.$$

Das hier auftretende Integral kann aber nach derselben Formel (14) wieder durch Gammafunctionen ausgedrückt werden. Es ist offenbar

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Pi(-1\,.\,o)}t^{-a-\lambda-1}(1+t)^{a+b+2\lambda}\,.\,dt=\frac{\Gamma(a+b+2\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)}.$$

Digitized by Google

Daher ist das allgemeine Glied des Produktes gleich

$$(-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+b+2\lambda+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)}$$

und

$$\overset{a}{J}(x) \,.\, \overset{b}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+b+2\lambda} \Gamma(a+b+2\lambda+1)}{\lambda!\,\Gamma(a+b+\lambda+1)\,\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+\lambda+1)}. \quad (19)$$

Nicht ohne Interesse ist der spezielle Fall dieser Formel, in welchem $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{2}$ ist. Man bekommt

$$\overset{\frac{1}{2}}{J}(x) \overset{-\frac{1}{2}}{J}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda} \Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\lambda+1)\,.\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \quad (20)$$

Durch zweimalige Anwendung der Formel $\Gamma(x)\ \Gamma(\frac{1}{2}+x) = \sqrt{\pi}\,.\,2^{1-2x}\,\Gamma(2x)$ reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{(2x)^{2\lambda+1}}{\pi x\,.\,(2\lambda+1)!}; \text{ daher ist}$$

$$\overset{\frac{1}{2}}{J}(x) \overset{\frac{1}{2}}{J}(x) = \frac{\sin 2x\,.}{\pi x\,.} \quad (21)$$

Zu diesem Resultat kann man auch auf folgende Art gelangen: Nach der bekannten Gleichung

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a}}{\Gamma(\frac{1}{2})\ \Gamma(a+\frac{1}{2})} \int_{0}^{\pi} \cos\,(x\cos\varphi)\,\sin^{2a}\varphi\,.\,dx$$

findet man sogleich

$$\overset{\frac{1}{2}}{J}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \quad \text{und} \quad \overset{-\frac{1}{2}}{J} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

Das Produkt liefert wieder die Formel (21).

§ 7.

In der Theorie der bestimmten Integrale ist die Formel

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \int_{\Pi(-\infty\,.\,0)} e^{x} x^{-a}\,dx \quad (22)$$

Digitized by Google

von besonderer Wichtigkeit. Nach einer Mittheilung des Herrn Professor Schläfli kann ihre Richtigkeit auf folgende Weise dargethan werden:

Die Gammafunction (siehe Meyer, Best. Int. § 40) wird durch die Gleichung

$$\Gamma(x) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot n^x}{x\,(x+1)\,(x+2) \ldots (x+n-1)\,(x+n)}$$

definirt. Zerlegt man den Coefficienten von n^x in Partialbrüche, setzt also

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{x\,(x+1)\,(x+2) \ldots (x+n)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{A_\lambda}{x+\lambda},$$

so ist offenbar

$$A_\lambda = (-1)^\lambda \frac{n!}{\lambda!\,(n-\lambda)!} = (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda}$$

und

$$\frac{n!}{x\,(x+1)\,(x+2) \ldots (x+n)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda \binom{n}{\lambda} \frac{1}{x+\lambda}.$$

Der Factor $\frac{(-1)^\lambda}{x+\lambda}$ kann nun durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden. Man setzt im Integral

$$\int_{\Pi(-1.0)} t^{x+\lambda-1}\,dt$$

$t = e^{i\varphi}$, $dt = i e^{i\varphi} d\varphi$. Dann wird:

$$\int_{\Pi(-1.0)} t^{x+\lambda-1}\,dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x+\lambda)\varphi}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{i(x+\lambda)\varphi}}{x+\lambda}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^\lambda}{x+\lambda} \cdot 2i \sin(\pi x).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{(-1)^\lambda}{x+\lambda} = \frac{1}{2i \sin(\pi x)} \int_{\Pi(-1.0)} t^{x+\lambda-1}\,dt.$$

Digitized by Google

und $$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \frac{1}{2i\sin(\pi x)} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_{\mathrm{II}(-1\,.\,0)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \binom{n}{\lambda} t^{\lambda+x-1}\,.\,dt$$

$$= \frac{1}{2i\sin(\pi x)} \int_{\mathrm{II}(-1\,.\,0)} (1+t)^n t^{x-1}\,dt.$$

Wenn man noch auf beiden Seiten mit $n^x \,.\, 2i\sin(\pi x)$ multiplicirt und die Gleichung (23) berücksichtigt, so erhält man

$$2i\sin(\pi x)\,.\,\Gamma(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,0)} n^x (1+t)^n t^{x-1}\,dt$$

oder für $z = nt$

$$2i\sin(\pi x)\,\Gamma(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \int_{\mathrm{II}(-n\,.\,0)} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n z^{x-1}\,dz = \int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,0)} e^z z^{x-1}\,dz.$$

Bekanntlich ist aber $\sin(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}$. Durch diese Substitution folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{II}(-\infty\,.\,0)} e^z z^{x-1}\,dx.$$

Setzt man endlich noch $1-x = a$, so ergibt sich unmittelbar die Formel (22).

Wenn man in der vorhergehenden Entwicklung den Bruch $\frac{1}{x+\lambda}$ durch das bestimmte Integral $\int_0^1 t^{x+\lambda-1}\,dt$ ersetzt, so gelangt man durch einen ähnlichen Process zu dem Euler'schen Integral erster Art

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-z} z^{a-1}\,dz,$$

das offenbar nur so lange convergirt, als die reelle Componente von a nicht negativ wird. Die Formel (22) ist dieser Beschränkung nicht unterworfen, da das Argument a jeden beliebigen endlichen Werth annehmen darf.

Digitized by Google

§ 8.

Mit Hülfe dieser Formel (22) kann das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\varphi}}{(i\varphi + k)^a} dx,$$

welches Cauchy in der bereits erwähnten Abhandlung unmittelbar neben dem in § 5 behandelten Integral angibt, ausgewerthet werden. Mit Recht legt ihm Meyer eine grosse Wichtigkeit bei, da eine ganze Reihe anderer Integrale als specielle Fälle in demselben enthalten sind. Es convergirt, wenn $a > 1$ ist. Man sieht dies leicht ein, wenn man das vorgelegte Integral mit $\int e^{i\varphi} d\varphi = -ie^{i\varphi} = -i(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vergleicht. Für reelle, wenn auch unendlich grosse Werthe von x bleibt es zwischen bestimmten Grenzen stets endlich. Fassen wir aber beide Integrale als Summen auf, so erhält man die Elemente des ersten aus den Elementen des zweiten, indem man die letztern durch $(i\varphi + k)^a$ dividirt. Wenn aber a positiv ist, so wird $(i\varphi + k)^a$ unendlich gross. Daher muss das erste Integral für reelle, aber unendlich grosse φ verschwinden. Das Integral convergirt somit für $a > o$. Die Constante c möge reell bleiben, kann aber dann positiv oder negativ sein. Im ersten Fall wird die Exponentialfunction längs des ganzen nördlichen Horizontes verschwinden. Setzt man nämlich $\varphi = x + iy$, also $ic\varphi = icx - cy$, so wird $e^{ic\varphi} = e^{icx} e^{-cy}$. Der Factor e^{-cy} wird um so kleiner, je grösser y wird, und darf für sehr grosse y geradezu gleich o gesetzt werden. So ist leicht einzusehen, dass das Integral am ganzen nördlichen Horizont verschwindet, und man kann denselben dem von $-\infty$ bis $+\infty$ führenden Integrationsweg hinzufügen, ohne den Werth des Integrals zu ändern. Freilich ist der neue Integrationsweg bei $-\infty$ nicht geschlossen, weil $(i\varphi + k)^a$ nur für ganzzahlige Werthe von a den frühern Werth wieder annimmt. Der Integrationsweg ist also eine Schlinge $\mathrm{II}(-\infty . ik)$. Man hat daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ic\varphi} d\varphi}{(i\varphi + k)^a} = \int_{\mathrm{II}(-\infty . ik)} \frac{e^{ic\varphi} . d\varphi}{(i\varphi + k)^a}.$$

Setzt man $i\varphi + k = z$ oder $\varphi = -iz + ik$; $d\varphi = -i dz$, so ist der Integrationsweg der neuen Variabeln eine Schlinge, welche von $-i\infty$ rechtläufig um o herumführt. Das Integral ist somit gleich

$$-ie^{-ck} \int_{\mathrm{II}(-i\infty . o)} e^{cz} z^{-a} dz.$$

Im südwestlichen Quadranten des Horizonts verschwindet das Integral überall. Für $z = -i\infty$ geschieht dies nach der am Anfang des Paragraphen angestellten Convergenzuntersuchung wegen des Factors $\frac{1}{(i\varphi + k)^a}$, in den übrigen Theilen des Viertelkreises in

Digitized by Google

Folge des Factors e^{cz}, dessen Exponent eine grosse negative reelle Componente besitzt. Ganz analog wie in § 5 darf man daher den Integrationsweg drehen und die Oeffnung der Schlinge wieder nach dem Westpunkt versetzen. Setzt man zugleich $u = cz$, wodurch die Integrationscurve keine Aenderung erleidet, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ic\varphi}\,dx}{(i\varphi + k)^a} = -ie^{-ck}c^{a-1}\int_{\text{II}(-\infty\,.\,o)} e^u u^{-a}\,du,$$

und endlich mit Hülfe von (22)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ic\varphi}\,dx}{(i\varphi + k)^a} = \frac{2\pi}{\Gamma(a)}\,c^{a-1}e^{-ck}, \tag{23}$$

wenn $c > o$ und $a > o$.

Wenn c negativ ist, verschwindet die Exponentialfunction am südlichen Horizont, den man zu dem bereits vorhandenen Integrationsweg fügen kann. Dadurch erhält man eine Schlinge, welche keinen Pol umschliesst und daher auf eine beliebig kurze Strecke zusammengezogen werden kann. Das Integral verschwindet; also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ic\varphi}}{(i\varphi + k)^a} = o, \text{ wenn } c < o \text{ und } a > o. \tag{24}$$

§ 9.

Herr Meyer zeigt in § 74 seiner Theorie der bestimmten Integrale, wie aus den vorstehenden Formeln die beiden Laplace'schen Integrale

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}\,e^{-k} \\ \text{und}\quad &\int_0^{\infty} \frac{x\,.\,\sin x}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{\pi}{2k}\,e^{-k} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

erhalten werden. Nach der bisher befolgten Methode ist es jedoch, wie Herr Professor Schläfli, der in seinen Vorlesungen einen sehr ausgedehnten und fruchtbaren Gebrauch vom Integrationsweg zu machen pflegt, gezeigt hat, leicht, dieselben direkt zu bestimmen.

Digitized by Google

Es ist nämlich $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; daher

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + k^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{ix}\, dx}{x^2 + k^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-ix}\, dx}{x^2 + k^2}$$

oder gleich

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{ix}\, dx}{x^2 + k^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}\, dx}{x^2 + k^2},$$

wenn man im zweiten Integral die Variable $-x$ statt x einführt und den Integrationsweg umkehrt. Diese Summe ist aber offenbar gleich

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\, dx}{x^2 + k^2} = \frac{1}{2}\int_{I(ik)} \frac{e^{ix}}{x + ik} \cdot \frac{dx}{x - ik}.$$

Nach (6) ist aber der Werth dieses Integrals gleich $\frac{\pi}{2k} e^{-k}$, da in Folge des Factors e^{ix} das Integral am nördlichen Horizont verschwindet und somit der Integrationsweg zu einer geschlossenen, den Pol $x = ik$ umschliessenden Curve ergänzt werden kann.

Auf analoge Weise findet man den Werth des zweiten Integrals.

Das mit den obigen verwandte Integral (siehe Meyer § 106)

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x}$$

bietet etwas grössere Schwierigkeiten dar. Es ist convergent, da $x = o$ nicht unzugänglich ist, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte. Denn $\underset{x=o}{\text{Lim}} \frac{\sin x}{x}$ ist ja bekanntlich $= 1$. Setzt man $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, so wird

$$S = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Diese beiden Integrale convergiren jedoch nicht mehr, da für sie $x = o$ ein Unstetigkeitspunkt geworden ist. Man darf aber von dem ursprünglichen Integral den Theil vernachlässigen, welcher der unendlich kleinen Strecke von o bis $+\varepsilon$ entspricht. Dann ist

Digitized by Google

$$S = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x},$$

oder, wenn man im zweiten Integral wieder $-x$ statt x als Variable einführt:

$$S = \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Man kann nun die beiden Integrationswege durch einen kleinen Halbkreis, welcher der Null nördlich ausweicht, mit einander verbinden und den so entstandenen Integrationsweg mit Hülfe des nördlichen Horizontes, an welchem das Integral überall verschwindet, zu einer geschlossenen Curve ergänzen, welche den Pol $x = ik$ rechtläufig umschliesst. Der Integrationsweg ist überall im eigentlichen Sinne zusammenhängend, da die Phase von x sich nur stetig ändert. Während die Variable den nördlichen Horizont durchläuft, wächst ihre Phase von o bis π. Diesen Werth behält sie so lange bei, als x sich auf dem negativen Theile der Realitätsgeraden befindet. Durch die nun folgende rückläufige Drehung der Variabeln um den Nullpunkt geht die Phase von $+\pi$ in o über. Das ist aber in völliger Uebereinstimmung mit dem Umstand, dass die Variable von $+\varepsilon$ an wieder positive Werthe zu durchlaufen hat.

Selbstverständlich muss vom Integral, welches dem ganzen geschlossenen Weg entspricht, der dem Halbkreis entsprechende Theil desselben subtrahirt werden. Die letzte Gleichung geht daher in die folgende über:

$$S = \frac{1}{2i} \int_{I(ik)} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{1}{2i} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Das erste dieser Integrale kann nach (6) sogleich ausgewerthet werden. Es ist $= -\frac{\pi}{2k^2} \cdot e^{-k}$. Beim zweiten sind die Grenzen so zu verstehen, dass die Variable auf einem Halbkreis und nicht auf der Realitätsgeraden von $-\varepsilon$ nach $+\varepsilon$ geführt wird. Das Integral ist daher offenbar die Hälfte von

$$\int_{I(o)} \frac{e^{iax}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x},$$

in welchem der Integrationsweg rückläufig ist. Mit Berücksichtigung hievon ist

$$-\frac{1}{2i} \int_{I(o)} \frac{e^{ix}}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k^2}$$

Digitized by Google

und daher

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2 + k^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k^2}(1 - e^{-k}). \qquad (26)$$

§ 10.

Das Integral $\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$, in welchem die algebraischen Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten enthalten, wird convergiren, wenn es für endliche Werthe von x keinen Unstetigkeitspunkt aufweist und wenn der höchste Exponent des Nenners denjenigen des Zählers um einen unächten Bruch, etwa um $1 + \alpha$, wo α eine beliebige positive Grösse ist, übersteigt. Der Integrand verhält sich dann im Unendlichen wie $\frac{\text{Constante}}{x^{1+\alpha}}$. Da aber durch die Integration der Grad der Function um eine Einheit erhöht wird, so benimmt sich das Integral wie $\frac{\text{Constante}}{x^{\alpha}}$, verschwindet also, wenn α positiv ist. Man sieht hieraus, dass die Differenz der beiden Exponenten auch kleiner als 2 sein kann, aber stets grösser als 1 sein muss.

So ist das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$$

offenbar convergent für $0 < a < 1$. Wäre nämlich $a \geqq 1$, so würde das Integral für unendlich grosse Werthe der Variabeln selbst unendlich gross werden, während hingegen für $a \leqq 0$ der Nullpunkt unzugänglich ist.

Wir verlängern nun den Integrationsweg um den ganzen rechtläufig zu durchlaufenden Horizont in die von $+\infty$ nach 0 zurückführende Hälfte der Realitätsgeraden (Fig. 10). Durch das Umlaufen des Horizontes ändert sich die Phase der Variabeln um 2π. Sie hat daher auf der Strecke von ∞ bis 0 den Werth $e^{2i\pi} \cdot x$, wo nun x wieder die Phase 0 besitzt. Da das Integral dem Horizont entlang überall verschwindet, so ist der dem ganzen Weg entsprechende Werth desselben gleich

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1} dx + \int_\infty^0 \frac{(e^{2i\pi} \cdot x)^{a-1}}{e^{2i\pi} \cdot x + 1} e^{2i\pi} \cdot dx$$

Digitized by Google

$$= \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx - \int_0^\infty \frac{e^{2i\pi \cdot a} x^{a-1}}{x+1}\,dx$$

$$= (1 - e^{2i\pi \cdot a}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx$$

$$= -e^{i\pi \cdot a}(e^{i\pi \cdot a} - e^{-i\pi \cdot a}) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx.$$

Wir können aber den Werth des Integrals noch auf eine andere Weise bestimmen, indem wir den Integrationsweg um den Pol $x = -1$ zusammenziehen (Fig. 10). Da nun die Variable den Punkt $x = 0$ nicht mehr umläuft, so nimmt sie bei ihrer Rückkehr zum Nullpunkt wieder die Phase 0 an. Der ganze Integrand kehrt somit wieder auf seinen ursprünglichen Werth zurück und der Integrationsweg ist eine den Pol $x = -1$ rechtläufig umschliessende, geschlossene Curve. Das Integral hat also auch den Werth

$$\int_{I(-1)} \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = 2i\pi \cdot (-1)^{a-1} = -2i\pi \cdot e^{i\pi \cdot a}.$$

Daher ist

$$-2i \cdot e^{i\pi \cdot a} \cdot \sin a\pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = -2i\pi \cdot e^{i\pi \cdot a}$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (\text{wenn } 0 < a < 1). \tag{27}$$

§ 11.

Bisweilen kann ein Integral durch eine passende Substitution auf ein anderes zurückgeführt werden, welches die Anwendung der Cauchy'schen Formel gestattet. Ein sehr einfaches Beispiel liefert hiezu das Integral

$$\int_{I(a)} e^{\frac{c}{x-a}}\,dx,$$

Digitized by Google

welches Herr Professor Schläfli in der Zürcher Vierteljahrsschrift (Jahrgang 1857) auf andere Weise ausgewerthet hat. Der Punkt $x = a$ ist offenbar ein Pol, für welchen der Integrand unendlich gross wird.

Wenn x einen Kreis um a beschreibt, so muss $x - a$ einen mit demselben Radius beschriebenen Kreis durchlaufen, dessen Mittelpunkt in o liegt. Setzt man $x - a = \frac{1}{z}$, also $dx = -\frac{dz}{z^2}$, so wird die Variable z als reciproker Werth von $x - a$ den Nullpunkt rückläufig umkreisen.

Das Integral wird daher gleich

$$\int_{I(o)} e^{cz} \frac{dz}{z^2},$$

wo das von dem Factor $-\frac{1}{z^2}$ herrührende negative Zeichen dadurch aufgehoben wird, dass man den Integrationsweg umkehrt und die Variable rechtläufig um den Nullpunkt herumführt. Eigentlich entspricht dem Pol $x = a$ der Pol $z = \infty$. Durch die Substitution $z = \frac{1}{x-a}$ tritt jedoch, wie aus der Form des letzten Integrales hervorgeht, noch ein neuer Pol auf, nämlich $z = o$, um den man nun den Integrationenweg zusammenziehen kann. Mit Berücksichtigung der Formel (7) ergibt sich unmittelbar

$$\int_{I(o)} e^{cz} \frac{dz}{z^2} = 2i\pi \cdot c,$$

also auch

$$\int_{I(a)} e^{\frac{c}{x-a}} dx = 2i\pi \cdot c. \qquad (28)$$

Durch ein ganz analoges Verfahren ergibt sich für $n > 1$ die Formel

$$\int_{I(a)} e^{\frac{c}{(x-a)^n}} dx = o. \qquad (29)$$

Ein anderes Beispiel bietet das Integral

$$S = \int_o^\infty \frac{\log x \cdot dx}{x\sqrt{x^2 - 1}},$$

welches Herr Weber in Königsberg im 75. Band des Crelle'schen Journals, Seite 82, anwendet. Durch die Substitution $x = \sec \varphi$ erhält man die Gleichung:

Digitized by Google

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sec\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(\sec^2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\,d\varphi,$$

oder, wenn man $z = \operatorname{tg}\varphi$, also $\varphi = \operatorname{arctg} z$ und $d\varphi = \frac{dz}{1+z^2}$ setzt,

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \log\,(1+z^2)\,\frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \log\,(1-iz)\,\frac{dz}{1+z^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \log\,(1+iz)\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Im zweiten Integral dieser Summe ersetzt man z durch $-z$, kehrt den Integrationsweg um und addirt die beiden Integrale, indem man die beiden Wege zusammenfügt. Dadurch wird

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \log\,(1-iz)\,\frac{dz}{1+z^2}.$$

Da $\log\,(1-iz)$ von einer niedereren Ordnung unendlich gross wird als $(1-iz)$, so verschwindet das Integral für unendlich grosse Werthe der Variabeln, und es darf dem sich über die ganze Realitätsgerade erstreckenden Integrationsweg noch der nördliche Horizont hinzugefügt werden.

Dadurch erhält man aber eine geschlossene Curve, welche um den Pol $z = i$ zusammengezogen werden kann. Es wird also

$$S = \frac{1}{2}\int_{I(i)} \frac{\log\,(1-iz)}{z+i}\cdot\frac{dz}{z-i} = \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\text{oder} \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\pi}{2}\log 2. \tag{30}$$

Digitized by Google

§ 12.

Das Integral

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

in welchem n eine ganze Zahl sein soll, kann auch mit Hülfe der Formel (7) behandelt werden. Ersetzt man nämlich die Variable x durch — x, und kehrt nach der Substitution den Integrationsweg um, so ergibt sich auch

$$S = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Beide Integrale besitzen denselben Integrand und werden dadurch addirt, dass man die beiden Integrationswege aneinander fügt. Es ist somit

$$2S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Nach frühern Betrachtungen ist dieses Integral offenbar convergent, und es darf dem Integrationsweg, dem Werthe von 2 S unbeschadet, der nördliche Horizont hinzugefügt werden. Hiedurch wird er zu einer geschlossenen Curve, welche den Unstetigkeitspunkt $x = i$ umschliesst und um denselben zusammengezogen werden kann. Man findet nun

$$2S = \int_{I(i)} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_{I(i)} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \cdot \frac{dx}{(x-i)^{n+1}}.$$

Das f (x) der Cauchy'schen Formel ist also $= \frac{1}{(x+i)^{n+1}}$ und somit

$$2S = \frac{2i\pi}{n!} D_i^n \frac{1}{(x+i)^{n+1}},$$

wo D_i^n die n- malige Differentiation nach x und die nachherige Substitution $x = i$ bezeichnen soll. Nun ist aber

$$D^n (x+i)^{-(n+1)} = (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \ldots (2n-1)\, 2n \cdot (x+i)^{-(2n+1)},$$

$$D_i^n (x+i)^{-(n+1)} = (-1)^n (n+1)(n+2) \ldots (2n-1)\, 2n \cdot (2i)^{-(2n+1)};$$

Digitized by Google

und daher

$$2\,S = \frac{2\,i\,\pi}{n!} \cdot \frac{(-1)^n\,(n+1)\,.\,(n+2)\ldots(2n)}{2^{2n+1}\,.\,i^{2n+1}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\ldots 2n}\,\pi,$$

also

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{31}$$

Eine ähnliche Behandlung gestattet das Integral

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sin}^{2n}\varphi\,d\varphi,$$

das mit

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,.\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

identisch ist. Durch die Substitution

$$\mathrm{Sin}\,\varphi = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$$

erhält man zunächst

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^{2n}\varphi\,.}{(1+\mathrm{tg}^2\varphi)^n}\,d\varphi.$$

Setzt man $\mathrm{tg}\,\varphi = x$ also $\varphi = \mathrm{arctg}\,\varphi$; $d\varphi = \frac{1}{1+x^2}$, so wird

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}\,.\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx,$$

wenn man analog, wie im letzten Paragraphen, x durch $-x$ ersetzt.

Durch Addition bekommt man

$$2A = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \int_{I(i)} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \int_{I(i)} \frac{x^{2n}}{(x+i)^{n+1}} \cdot \frac{dx}{(x-i)^{n+1}}.$$

Digitized by Google

Um die Cauchy'sche Formel (7) anwenden zu können, setzt man $f(x) = x^{2n}(x+i)^{-(n+1)} = (-i)^{n+1} \cdot x^{2n}(1-ix)^{-(n+1)}$, oder wenn man den letzten Faktor nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt

$$f(x) = (-i)^{n+1} x^{2n} \left[1 - (n+1) \cdot (-ix) + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}(-ix)^2 - \ldots\right]$$

$$= (-i)^{n+1} \left[x^{2n} - (n+1)(-ix)x^{2n} + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}(-ix)^2 x^{2n} - \ldots\ldots\right]$$

Nun nimmt man auf beiden Seiten den n^{ten} Differentialquotient und sondert nach der Differentiation das Produkt $2n \cdot (2n-1) \ldots (n+1) x^n$ als gemeinschaftlichen Faktor ab. Dadurch erhält man

$$f^{(n)}(x) = (-i)^{n+1} \cdot 2n \cdot (2n-1) \ldots (n+1) \cdot x^n \times \left[1 - (2n+1)(-ix) + \frac{(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2}(-ix)^2 - \ldots\right]$$

Die in der Klammer befindliche Reihe ist aber offenbar $(1-ix)^{-(2n+1)}$; daher

$$f^n(x) = (-i)^{n+1} \cdot 2n(2n-1) \ldots (n+1) x^n \cdot (1-ix)^{-(2n+1)}$$

und $f^n(i) = (-i) \cdot 2^{-(2n+1)} \cdot 2n \cdot (2n-1) \ldots (n+2)(n+1)$.

Nach (7) ist nun das letzte Integral

$$2S = \int_{I(i)} f(x) \frac{dx}{(x-i)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{n!} f^n(i) = \frac{(2n)!}{n!\,n!\,2^n} \cdot \pi$$

$$\text{und } S = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \cdot d\varphi = \left(n - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (32)$$

Das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \varphi \cdot d\varphi$$

kann nicht mit Hülfe des Integrationsweges behandelt werden. Es ist aber, wie übrigens auch das vorhergehende, ein spezieller Fall des Euler'schen Integrales erster Art, für welches bekanntlith die Gleichung existirt:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Digitized by Google

Durch die Substitution $\sin\varphi = x$ wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi \,.\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\varphi \,.\, d\varphi = \frac{2\,.\,4\,\ldots\,2n}{3\,.\,5\,\ldots\,(2n+1)}. \qquad (33)$$

§ 13.

Zum Schluss betrachten wir noch das Integral

$$S = \int_0^\infty \overset{0}{J}(x)\frac{dx}{k^2+x^2},$$

für welches Herr Weber im Crelle'schen Journal (Band 75, Seite 83) den offenbar unrichtigen Werth $\frac{\pi}{2k}\overset{0}{J}(ik)$ angegeben hat. Die Bessel'sche Funktion $\overset{0}{J}(x)$ kann durch eine unendliche Reihe (§ 6, 18) oder auch durch die Gleichung

$$\overset{0}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos w}\,dw \qquad (34)$$

definirt werden. Für unendlich grosse Werthe der Variabeln verhält sich die Funktion annähernd wie $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, verschwindet also geradezu, wenn x reell bleibt. Es ist daher leicht einzusehen, dass das vorgelegte Integral convergirt. Mit Hülfe von (34) erhält man

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{e^{ix\cos w}}{k^2+x^2}\,dx\,dw$$

oder, da die Integrationsfolge umgekehrt werden darf:

$$S = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dw\int_0^\infty e^{ix\cos w}\frac{dx}{k^2+x^2}$$

Digitized by Google

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_0^{\infty} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dw \int_0^{\infty} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2}$$

Führt man im zweiten Integral statt w die Variabele $\pi - w$ ein, so ergibt sich

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_0^{\infty} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_0^{\infty} e^{-ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2}$$

oder, wenn man im letzten Integral $+x$ durch $-x$ ersetzt:

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_0^{\infty} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_{-\infty}^{0} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\cos w} \frac{dx}{k^2+x^2}.$$

Da cos w stets positiv bleibt, so wird nach einer frühern Betrachtung (§ 8) nicht nur die Exponentialfunction $e^{ix\cos w}$ sondern auch das Integral

$$\int e^{ix\cos w} \frac{dx}{x^2+k^2}$$

am ganzen nördlichen Horizont verschwinden. Man kann daher den Integrationsweg zu einer geschlossenen, den Punkt $x = ik$ umschliessenden Curve ergänzen, und es ist somit

$$S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dw \int_{I(ik)} e^{ix\cos w} \frac{dx}{x^2+k^2}$$

Nach dem Satze von Cauchy (6) findet man aber

$$\int_{I(ik)} e^{ix\cos w} \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{\pi}{k} e^{-k\cos w}$$

Digitized by Google

und wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt:

$$S = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \cos w} \, dw \tag{35}$$

Dieses Integral wird wohl am einfachsten dadurch ausgewerthet, dass man $e^{-k \cos w}$ in eine unendliche Reihe entwickelt.

Der von Herrn Weber angegebene Werth $\frac{\pi}{2k} {}^{0}J(ik)$ ist offenbar die Hälfte des Integrals:

$$\int_{I(ik)}^{0} J(x) \frac{dx}{k^2 + x^2} .$$

Setzt man nämlich $k^2 + x^2 = (x + ik)(x - ik)$, so liefert der Cauchy'sche Satz (6) unmittelbar die Gleichung

$$\int_{I(ik)}^{0} J(x) \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{k} {}^{0}J(ik). \tag{36}$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

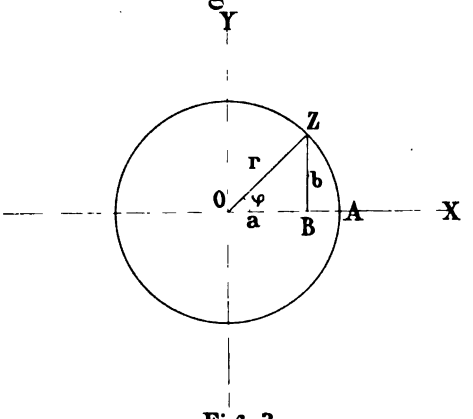


Fig. 2.

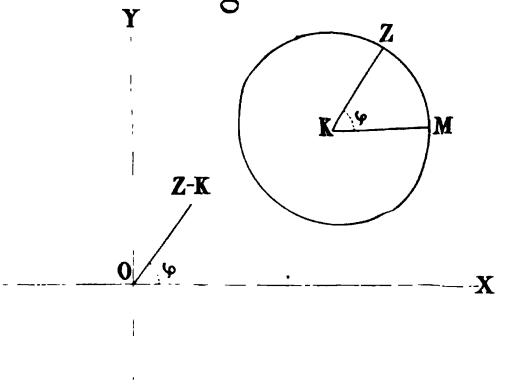


Fig. 3.

Integrationsweg. I(a) (geschlossen).

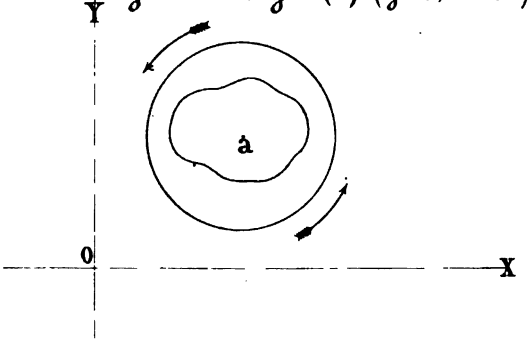


Fig. 4.

Integrationsweg. II(a.K) (in a nicht geschlossen).

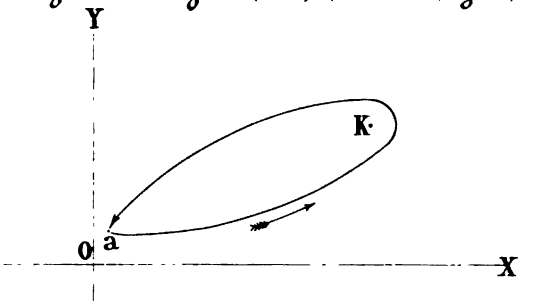


Fig. 5.

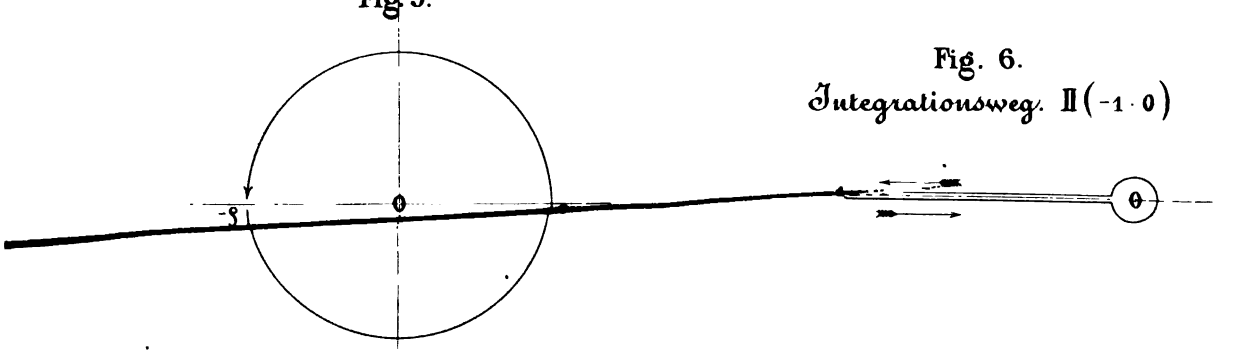
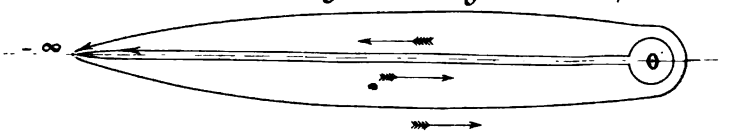


Fig. 6.

Integrationsweg. II(-1 . 0)

Fig. 7.

Identische Integrationswege. II(-∞ . 0)



Digitized by Google

Fig.8.

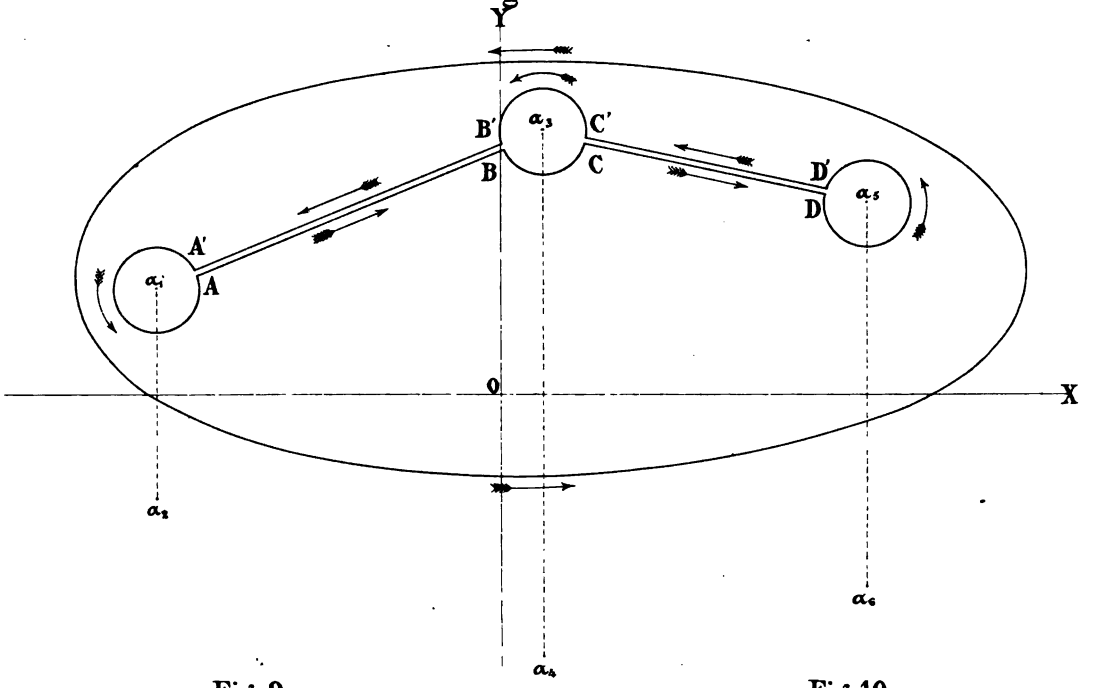


Fig.9.

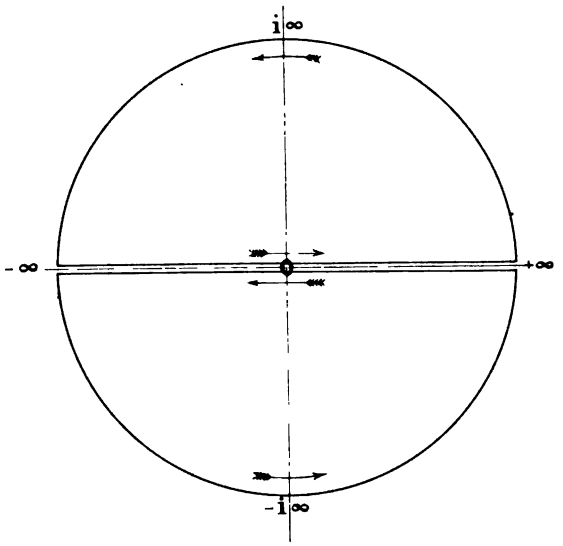
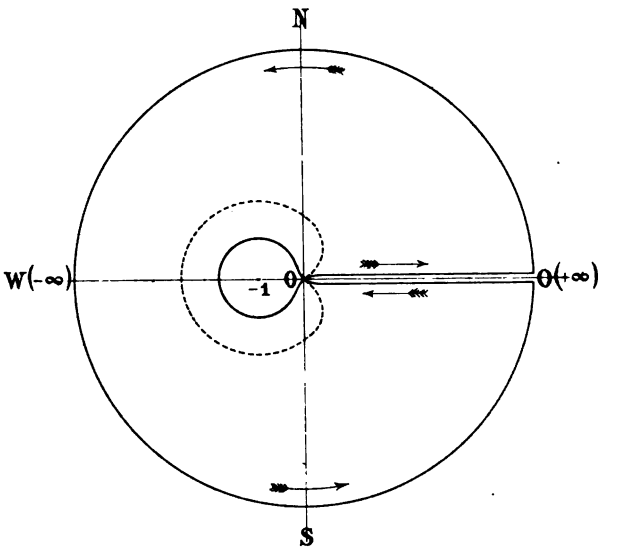


Fig.10.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google